इकाई 8

दोलन एवं तरंग गति
[OSCILLATION AND WAVE MOTION]

8·1. दोलन
[OSCILLATION]

स्तुनिष्ठ प्रश्न

(I) बहुविकल्पीय प्रश्न—

(क) सेकण्ड्री लोलक का आवर्तकाल होता है—

(i) 1 सेकण्ड (ii) 2 सेकण्ड
(iii) 3 सेकण्ड (iv) 4 सेकण्ड ।

(ख) A आयाम से सरल आवर्त गति करते हुए किसी कण की सम्पूर्ण ऊर्जा अनुक्रमानुपाती होती है—

(i) A (ii) A^2
(iii) $\sqrt{A}$ (iv) $\frac{1}{A}$.

(ग) सरल आवर्त गति करते हुए कण की साम्य स्थिति से दूरी A है। इसकी स्थितिज ऊर्जा होगी—

(i) $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ (ii) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$
(iii) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$ (iv) 0.

(घ) एक ग्रह का द्रव्यमान तथा व्यास पृथ्वी से दुगुने हैं। इस ग्रह पर उस लोलक का आवर्तकाल जिसका पृथ्वी पर आवर्तकाल 1 सेकण्ड है, होगा—

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ सेकण्ड (ii) $\sqrt{2}$ सेकण्ड
(iii) 2 सेकण्ड (iv) $\frac{1}{2}$ सेकण्ड।

(ङ) सरल आवर्त गति में स्थिर रहता है—

(i) प्रत्यानयन बल (ii) आयाम
(iii) गतिज ऊर्जा (iv) आवर्तकाल।

उत्तर—(क) (ii), (ख) (ii), (ग) (i), (घ) (ii), (ङ) (iv).

(II) सही जोड़ियाँ बनाइए—

(अ)	(ब)
1. विस्थापन y	(क) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{y}}$
2. वेग v	(ख) $-\omega^2 y$
3. त्वरण α	(ग) $2\pi\sqrt{\frac{y}{\alpha}}$
4. आवर्तकाल T	(घ) $\omega\sqrt{A^2-y^2}$
5. आवृत्ति υ	(ङ) $A\sin\omega t$.

उत्तर—1. (ङ), 2. (घ), 3. (ख), 4. (ग), 5. (क)।

(III) निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य बताइए—

(क) आवर्ती गति में वस्तु का पथ हमेशा सरल रेखीय होता है।

(ख) प्रत्येक दोलन या कम्पन गति आवश्यक रूप से आवर्ती होती है।

(ग) पृथ्वी के चारों ओर चन्द्रमा की गति सरल आवर्त गति होती है।

(म. प्र. 2009 सेट A)

(घ) जब कण साम्य स्थिति से गुजरता है तब उसका त्वरण शून्य होता है।

(ङ) जब कण का विस्थापन अधिकतम होता है तब उसका त्वरण भी अधिकतम होता है।

(च) सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन समीकरण $y = a\sin\omega t$ नहीं है।

(म. प्र. 2013)

उत्तर—(क) असत्य, (ख) सत्य, (ग) असत्य, (घ) सत्य, (ङ) सत्य, (च) असत्य।

(IV) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(क) अवमन्दक बलों की उपस्थिति में पिण्ड का कम्पन आयाम .... है।

(म. प्र. 2009 सेट B)

(ख) सरल आवर्त गति के दौरान कण की सम्पूर्ण ऊर्जा .... रहती है।

(ग) स्प्रिंग की लम्बाई में एकांक वृद्धि या एकांक संकुचन उत्पन्न करने के लिए आवश्यक बल को उसका .... कहते हैं।

(घ) जब कोई वस्तु अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर सरल रेखा में दोलन गति करती है, तो इस प्रकार की गति को .... कहते हैं।

(ङ) सेकण्ड लोलक का आवर्तकाल .... सेकण्ड होता है।

(म. प्र. 2009 सेट B)

उत्तर—(क) घटता, (ख) नियत, (ग) बल नियतांक (स्प्रिंग नियतांक), (घ) सरल आवर्त गति, (ङ) 2.

(V) एक शब्द/एक वाक्य में उत्तर दीजिए—

(क) सरल आवर्त गति किस भौतिक राशि के संरक्षण पर आधारित है ?

(ख) सरल लोलक के गति के मार्ग में किस बिन्दु पर डोरी में तनाव अधिकतम होगा ?

(ग) सरल आवर्त गति करने वाले कण की कुल गतिज ऊर्जा के लिए सूत्र लिखिए।

(घ) सरल लोलक के आवर्तकाल के लिए व्यंजक लिखिए।

(ङ) स्प्रिंग की लम्बाई बढ़ाने पर उसके दोलनकाल पर क्या प्रभाव पड़ता है ?

उत्तर—(क) यान्त्रिक ऊर्जा, (ख) माध्य स्थिति में, (ग) कुल गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$,

(घ) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, (ङ) दोलनकाल बढ़ जाता है।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. दोलन गति या कम्पन गति की परिभाषा लिखिए।

उत्तर—जब कोई वस्तु एक निश्चित बिन्दु अथवा अपनी माध्य स्थिति के आगे पीछे अथवा इधर-उधर आवर्ती गति करता है तो इसे दोलनी गति या कम्पन गति कहते हैं।

प्रश्न 2. मुक्त दोलन व अवमन्दित दोलन क्या है ?

उत्तर—**मुक्त दोलन**—दोलन करने के लिए स्वतंत्र कोई निकाय जब बिना किसी बाह्य आवर्ती बलों की सहायता से स्वयं की प्राकृतिक आवृत्ति से दोलन करता है तो इन दोलनों को मुक्त दोलन कहते हैं।

अवमन्दित दोलन—जब कोई वस्तु गतिरोधी बलों के प्रभाव के कारण समय के साथ घटते हुए आयाम वाले दोलन करती है तो वस्तु के इन दोलनों को अवमन्दित दोलन कहते हैं।

प्रश्न 3. एक दोलन करते सरल लोलक की किस स्थिति में इसके धागे में तनाव अधिकतम होता है।

उत्तर—एक दोलन करते सरल लोलक के धागे में तनाव अधिकतम ($= mg$) तब होता है जबकि वह अपनी माध्य स्थिति में होता है।

प्रश्न 4. सरल लोलक (Simple Pendulum) **क्या है ?**

उत्तर—किसी पदार्थ के बिन्दु आकार के भारी कण को एक भारहीन अवितान्य (लम्बाई में न बढ़ने वाली) एवं पूर्णत: लचकदार डोरी से बाँधकर किसी दृढ़ आधार से लटका दें तथा घर्षण रहित दोलन की व्यवस्था करें तो इस निकाय को सरल लोलक कहते हैं।

प्रश्न 5. सेकण्ड लोलक की परिभाषा लिखिए।

उत्तर—सेकण्ड लोलक उस सरल लोलक को कहते हैं जिसका आवर्तकाल 2 सेकण्ड होता है।

प्रश्न 6. सरल आवर्त गति के विस्थापन का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

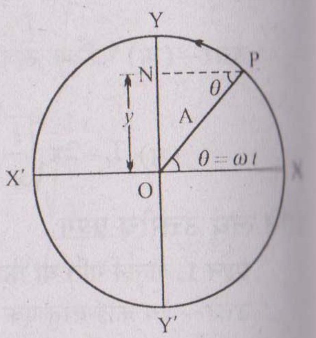
अथवा

सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन समीकरण स्थापित कीजिए।

उत्तर—मानलो XYX′Y′ एक वृत्त है जिसका केन्द्र O तथा जिसकी त्रिज्या A है। मानलो इस वृत्त की परिधि पर एक कण एकसमान कोणीय चाल ω से घूम रहा है। मानलो समय $t = 0$ पर कण बिन्दु X पर है तथा किसी समय t पर कण बिन्दु P पर है। बिन्दु P से व्यास YOY′ पर डाले गये

लम्ब PN का पाद N है।

चूँकि कण को बिन्दु X से P तक जाने में t सेकण्ड लगते हैं अत: t सेकण्ड में कण द्वारा घूमा हुआ कण $\angle POX = \theta$ है।



तब, $$\omega = \frac{\theta}{t}$$

या $$\theta = \omega t$$

t सेकण्ड में लम्ब-पाद का विस्थापन ON है।

माना कि $ON = y$ है।

तब त्रिभुज NPO में,

$$\sin NPO = \frac{ON}{OP}$$

परन्तु $\angle NOP = \angle POX = \theta = \omega t$, $ON = y$ तथा $OP = A$.

अत: $$\sin \omega t = \frac{y}{A}$$

या $y = A \sin \omega t$. यही विस्थापन का अभीष्ट व्यंजक है।

प्रश्न 7. सरल आवर्त गति करने वाले किसी कण के वेग के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिए तथा बताइए कि कण का वेग कब अधिकतम और कब न्यूनतम होता है ?

(म. प्र. 2009 सेट I)

अथवा

सरल आवर्त गति करते हुए कण के वेग के लिए सूत्र स्थापित कीजिए।

उत्तर—सरल आवर्त गति करने वाले कण के विस्थापन को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है—

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \quad ...(1)$$

जहाँ, A आयाम तथा ϕ कण की प्रारम्भिक कला है।

परन्तु वेग $v = \frac{dy}{dt}$

अत: समी. (1) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$v = \frac{d}{dt}[A\sin(\omega t + \phi)]$$

या $$v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

या $$v = A\omega\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)}, \quad [\because \sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) = 1]$$

$$= A\omega\sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}}, \quad \text{[समी. (1) से]}$$

या $$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2} \quad ...(2)$$

समी. (2) सरल आवर्त गति करने वाले कण का वेग समीकरण कहलाता है।

स्थिति 1. यदि $y = 0$ हो, तो समी. (2) से,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - 0}$$

या $v = A\omega$ (अधिकतम)

अत: जब कण साम्य स्थिति से गुजरता है तो वेग अधिकतम होता है।

स्थिति 2. यदि $y = \pm A$ हो, तो समी. (2) से,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - A^2} = \omega \times 0$$

या $$v = 0$$

अत: अधिकतम विस्थापन की स्थिति में कण का वेग शून्य होता है।

प्रश्न 8. सरल आवर्त गति से आप क्या समझते हैं तथा इसकी विशेषताएँ लिखिए।

(म. प्र. 2010, 13)

उत्तर—जब कोई वस्तु माध्य स्थिति के दोनों ओर सरल रेखा में गति करती है तो इस प्रकार की गति को सरल आवर्त गति कहते हैं।

उदाहरण—पेण्डुलम की गति।

सरल आवर्त गति की विशेषताएँ—(i) वस्तु अपनी मध्यमान स्थिति के दोनों ओर सरल रेखा में गति करती है। (ii) वस्तु पर लगने वाला बल, मध्यमान स्थिति से विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा सदैव मध्यमान स्थिति को ओर कार्य करता है। (iii) गति करते हुए वस्तु एक निश्चित समय के उपरान्त अपनी मध्यमान स्थिति से गुजरती है इस निश्चित समय को आवर्तकाल कहते हैं। (iv) सरल आवर्तगति में ऊर्जा संरक्षित रहती है।

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. सरल आवर्त गति करने वाले कण के त्वरण के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिए। बताइए कि कण का त्वरण कब अधिकतम और कब न्यूनतम होता है ?

उत्तर—सरल आवर्त गति करने वाले कण के विस्थापन को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है—

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \quad ...(1)$$

यदि कण का त्वरण α हो, तो

$$\alpha = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\right]$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\{A\sin(\omega t + \phi)\}\right] = \frac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t + \phi)]$$

$$= A\omega\frac{d}{dt}[\cos(\omega t + \phi)] = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

समी. (1) से मान रखने पर,

$$\alpha = -A\omega^2 . \frac{y}{A} = -\omega^2 y \qquad ...(2)$$

या $$\alpha \propto y$$

अतः सरल आवर्त गति करने वाले कण का त्वरण उसकी साम्य स्थिति से विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है।

(–) चिन्ह इस बात का द्योतक है कि त्वरण की दिशा विस्थापन बढ़ने की दिशा के विपरीत अर्थात् साम्य स्थिति की ओर होती है।

स्थिति 1. जब $y = 0$ हो तो समी. (2) से,

$$\alpha = 0$$

अर्थात् **जब कण साम्य स्थिति से गुजरता है तो उसका त्वरण शून्य होता है।**

स्थिति 2. जब $y = A$ हो तो समी. (2) से,

$$\alpha = -\omega^2 A \quad \text{(अधिकतम)}$$

अर्थात् **जब कण का विस्थापन अधिक होता है तो उसका त्वरण भी अधिकतम होता है।**

प्रश्न 2. सरल आवर्त गति करने वाले कण के आवर्तकाल तथा आवृत्ति के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए। **(म. प्र. 2009 सेट C)**

उत्तर—सरल आवर्त गति करने वाले कण का त्वरण

$$\alpha = \omega^2 y, \qquad \text{(केवल परिमाण पर विचार करने पर)}$$

या $$\omega^2 = \frac{\alpha}{y}$$

या $$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{y}} = \sqrt{\frac{\text{त्वरण}}{\text{विस्थापन}}}$$

आवर्तकाल $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}}$$

तथा आवृत्ति $$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{त्वरण}}{\text{विस्थापन}}}.$$ **यही अभीष्ट व्यंजक है।**

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

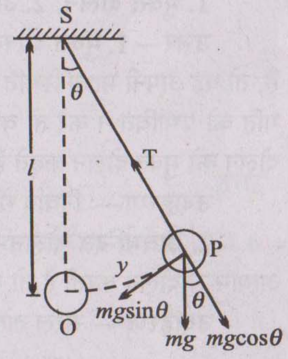
प्रश्न 1. सरल लोलक के आवर्तकाल के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए। **(म. प्र. 2009 सेट B, 11 सेट C)**

उत्तर—मानलो गोलक का द्रव्यमान m तथा लोलक की प्रभावकारी लम्बाई l है। S निलम्बन बिन्दु तथा O गोलक की माध्य स्थिति है। मानलो दोलन के दौरान किसी क्षण गोलक की स्थिति P है। तब विस्थापन OP = y तथा $\angle OSP = \theta$. इस स्थिति में गोलक पर दो बल कार्य करते हैं—

(i) धागे का तनाव T, धागे के अनुदिश PS दिशा में ऊपर की ओर तथा (ii) गोलक का भार mg ऊर्ध्वाधर दिशा में नीचे की ओर।

गोलक के भार mg को दो समकोणिक घटकों में वियोजित किया जा सकता है—(अ) $mg\cos\theta$, जो धागे के अनुदिश SP दिशा में कार्य करता है तथा (ब) $mg\sin\theta$, जो SP के लम्बवत् दिशा में कार्य करता है।

घटक $mg\cos\theta$ धागे में तनाव T को सन्तुलित करता है। घटक $mg\sin\theta$ गोलक को माध्य स्थिति में लाने का प्रयत्न करता है। इसे प्रत्यानयन बल कहते हैं। अतः गोलक पर लगने वाला प्रत्यानयन बल



$$F = -mg\sin\theta$$

जहाँ ऋण चिह्न दर्शाता है कि F की दिशा विस्थापन के बढ़ने की दिशा के विपरीत है अर्थात् माध्य स्थिति O की ओर है।

यदि गोलक का कोणीय विस्थापन θ छोटा हो, तो $\sin\theta = \theta$.

अतः प्रत्यानयन बल $F = -mg\theta$

परन्तु $$\theta = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{OP}{SP} = \frac{y}{l}$$

अतः $$F = -mg\frac{y}{l} \qquad ...(1)$$

यदि प्रत्यानयन बल के कारण गोलक में उत्पन्न त्वरण α हो तो न्यूटन के गति के द्वितीय नियम से,

$$F = m\alpha \qquad ...(2)$$

समी. (1) व (2) से,

$$m\alpha = -mg\frac{y}{l}$$

या $$\alpha = -\frac{g}{l}y \qquad ...(3)$$

दिए हुए स्थान के लिए गुरुत्वीय त्वरण g का मान नियत है तथा दिये हुए लोलक के लिए प्रभावकारी लम्बाई l भी नियत है, अतः

$$\alpha \propto -y \qquad ...(4)$$

अर्थात् लोलक का त्वरण उसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती है तथा उसकी दिशा माध्य स्थिति की ओर है। अतः आयाम कम होने पर सरल लोलक की गति सरल आवर्त गति होती है।

आवर्तकाल के लिए व्यंजक—सरल आवर्त गति करने वाले कण का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}} = 2\pi\sqrt{\frac{y}{\alpha}}$$

समी. (3) से α का मान रखने पर,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{y}{\left(\frac{g}{l}\right)y}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

यही सरल लोलक के आवर्तकाल का व्यंजक है।

प्रश्न 2. निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

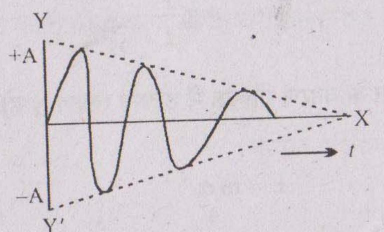
1. मुक्त दोलन, 2. अवमन्दित दोलन, 3. प्रणोदित दोलन।

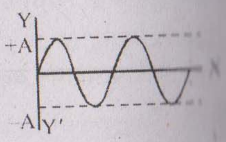
उत्तर—1. मुक्त दोलन— जब किसी वस्तु को माध्य स्थिति से विस्थापित करके छोड़ा जाता है, तो वह अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर सरल आवर्तगति करने लगती है। यदि बाह्य बल वस्तु की गति को प्रभावित न करे तो वस्तु एक निश्चित आवृत्ति व आयाम से कम्पन करती है। इस प्रकार के दोलन को मुक्त दोलन कहते हैं।

उदाहरण— निर्वात में सरल लोलक के दोलन।

2. अवमन्दित दोलन— जब कोई वस्तु गतिविरोधी बलों के प्रभाव में क्रमशः घटते हुए आयाम से दोलन करती है,तो वस्तु के दोलनों को अवमन्दित दोलन कहते हैं।

उदाहरण— सरल लोलक के दोलन।





3. प्रणोदित दोलन— जब कोई वस्तु बाह्य आवर्ती बल के प्रभाव में बाह्य आवर्ती बल की आवृति के बराबर दोलन करती है तो वस्तु के दोलन को प्रणोदित दोलन कहते हैं।

उदाहरण— तार वाले वाद्ययंत्रों में (सितार, वायलिन) में उत्पन्न कम्पन प्रणोदित कम्पन होते हैं।

आंकिक प्रश्न

प्रश्न 1. सरल आवर्त गति करते हुए एक पिण्ड का आवर्तकाल 3 सेकण्ड है। समय $t = 0$ से कितने समय पश्चात् विस्थापन उसके आयाम का आधा होगा ?

हल : सूत्र : $y = a\sin\omega t$

जहाँ, A आयाम है तथा y, समय t पर विस्थापन है।

परन्तु, $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

अतः $$y = a\sin\frac{2\pi t}{T} \quad ...(1)$$

दिया है : $T = 3$ सेकण्ड, $y = \frac{a}{2}$

समी. (1) में मान रखने पर,

$$\frac{a}{2} = a\sin\frac{2\pi t}{3}$$

या $$\sin\frac{2\pi t}{3} = \frac{1}{2}$$

या $$\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

या $$\frac{2\pi t}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ $$t = \frac{1}{4} \text{ सेकण्ड।}$$ उत्तर

प्रश्न 2. सभी प्रकार के समान दो सरल लोलकों के दोलन के आयाम 2 सेमी तथा 6 सेमी है। इनकी दोलन के ऊर्जाओं का अनुपात क्या होगा ?

उत्तर— दोलन ऊर्जा $E \propto a^2$

$E_1 = 4$ सेमी, $E_2 \propto 36$ सेमी

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$\boxed{E_1 : E_2 = 1:9}$ होगा।

8·2. तरंग गति

[WAVE MOTION]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

(I) बहुविकल्पीय प्रश्न—

(क) दो स्त्रोतों, जिनकी आवृत्तियाँ f_1 और f_2 हैं, की विस्पन्द आवृत्ति होगी—

(i) $\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1}$ (ii) $f_1 - f_2$

(iii) $2(f_1 - f_2)$ (iv) $\sqrt{(f_1^2 - f_2^2)}$.

(ख) ध्वनि में श्रोता व स्त्रोत के मध्य लगने वाला नियम है—

(i) डॉप्लर का नियम (ii) हाइगेन का नियम

(iii) न्यूटन का नियम (iv) गैलीलियो का नियम।

(ग) दो ध्वनि तरंगों में विस्पन्द के आभास का कारण है—

(i) परावर्तन (ii) अपवर्तन

(iii) विवर्तन (iv) व्यतिकरण।

UNIT 8

OSCILLATIONS AND WAVE MOTION

8·1. OSCILLATION

Objective Type Questions

(A) Multiple Choice Questions :

(i) The time-period of a seconds pendulum is : **(Model Q. P. 2007)**

(a) 1 second (b) 2 second (c) 3 second (d) 4 second.

(ii) A particle is executing simple harmonic motion of amplitude A. Its total energy is proportional to :

(a) A (b) A^2 (c) $\sqrt{A}$ (d) $\frac{1}{A}$.

(iii) If a particle executing simple harmonic motion is at distance x from its mean position, then its potential energy will be :

(a) $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ (b) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

(c) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$ (d) 0.

(iv) Time period of simple pendulum does not depend upon :

(a) Length (b) Mass

(c) Acceleration due to gravity (d) None of these.

(v) In simple harmonic motion, the constant term is :

(a) Restoring force (b) Amplitude

(c) Kinetic energy (d) Time-period.

(vi) The formula of the velocity for simple harmonic motion is : **(MP 2010)**

(a) $v=\omega\sqrt{a^2-y^2}$ (b) $v=y\sqrt{\omega^2-a^2}$

(c) $v=a\sqrt{\omega^2-y^2}$ (d) $v=\omega\sqrt{a^2+y^2}$.

Ans. (i) (b), (ii) (b), (iii) (a), (iv) (b), (v) (d), (vi) (b).

(B) Match the following In simple harmonic motion :

Column 'A'	Column 'B'
(i) Displacement (y)	(a) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{y}}$
(ii) Velocity (v)	(b) $-\omega^2y$
(iii) Acceleration (α)	(c) $2\pi\sqrt{\frac{y}{\alpha}}$
(iv) Time-period (T)	(d) $\omega\sqrt{A^2-y^2}$
(v) Frequency (υ)	(e) $A\sin\omega t$.

Ans. (i) (e), (ii) (d), (iii) (b), (iv) (c), (v) (a).

(C) State True or False :

(i) In periodic motion, the path of object is always along a straight line. **(MP 2012)**

(ii) Every oscillatory or vibratory motion is periodic.

(iii) The motion of moon around the earth is simple harmonic motion. **(MP 2009 Set A)**

(iv) When the particle passes through mean position, then its acceleration is zero.

(v) When the displacement of the particle is maximum, then its acceleration is also maximum.

(vi) The periodic time of second's pendulum is one second. **(MP 2010)**

Ans. (i) False, (ii) True, (iii) False, (iv) True, (v) True, (vi) False.

(D) Fill in the blanks :

(i) In presence of damping forces, the amplitude of oscillations of a body is .... **(MP 2009 Set B)**

(ii) In simple harmonic motion its total energy is ....

(iii) The restoring force setup per unit extension in the spring is called ....

(iv) When a body oscillates on both sides of its mean position in a straight line, then this kind of motion is called ....

(v) The time period of second pendulum is .... second. **(MP 2009 Set B, 10, 12)**

(vi) The periodic time of simple pendulum does not depend upon .... **(MP 2010)**

Ans. (i) decreases, (ii) constant, (iii) spring constant (Force constant), (iv) simple harmonic motion, (v) two, (vi) mass.

(E) Give one word/one statement :

(i) Simple harmonic motion is based on the conservation of which physical quantity ?

Ans. Mechanical energy.

(ii) In which position of motion of a simple pendulum the tension is maximum ?

Ans. In mean position.

(iii) Write formula for the total energy of a particle in simple harmonic motion.

Ans. Total energy $=\frac{1}{2}mw^2a^2$.

(iv) Write formula for time-period of a simple pendulum.

Ans. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

(v) On increasing the length of a spring, what is the effect on its time-period ?

Ans. Its time-period increases.

Very Short Answer Type Questions

Q. 1. Define time period, frequency and amplitude of S.H.M.

Ans. Time period : The time taken by an oscillating body to complete one oscillation is called time period.

Frequency : The number of oscillations in one second is called frequency.

Amplitude : The maximum displacement of a particle about its mean position is called amplitude.

Q. 2. Where do the K.E. and P.E. of a particle executing S.H.M. have maximum and minimum value ?

Ans. The P.E. is maximum at extreme position and minimum at mean position. The K.E. is maximum at mean position and minimum at extreme position.

Q. 3. Define spring constant and write its S.I. unit and dimensional formula.

Ans. Spring constant : The force required to elengate or compress a spring through unit length is called spring constant.

Unit : S.I. unit of spring constant is Nm^{-1}.

Dimensional formula : $[ML^0T^{-2}]$.

Q. 4. Why the length of simple pendulum is measured upto the centre of the bob ?

Ans. The centre of gravity of spherical bob lies at its centre. The weight of the body acts at the centre of gravity. Therefore the effective lenght is measured upto centre of the bob.

Q. 5. Can the time period of a pendulum be one day ?

Ans. No, the maximum time period of a simple pendulum of infinite length is 84·6 minute.

Q. 6. What is the reason that the frequency of oscillation clocks depend on the rise and fall of mercury level in the thermometer ?

Ans. If the mercury level increases, it shows that temperature has increased and the decrease in mercury level shows a decrease in temperature. Due to increase in temperature, the length of pendulum increases and $T \propto \sqrt{l}$. So time period also increases. Hence clock runs slow *i.e.*, the frequency of oscillation decreases. But with decrease in temperature, length decreases and so time period decreases. Hence clock runs fast *i.e.* , frequency of oscillation increases.

Q. 7. The pendulum clock cannot be used in artificial satellite. Why ?

Ans. In an artificial satellite, the bodies are in the state of weightlessness. Hence acceleration due to gravity becomes zero. Thus the time period becomes infinite. Therefore it cannot be used in the satellite.

Short Answer Type Questions

Q. 1. Derive an expression for the displacement of a particle executing S.H.M.

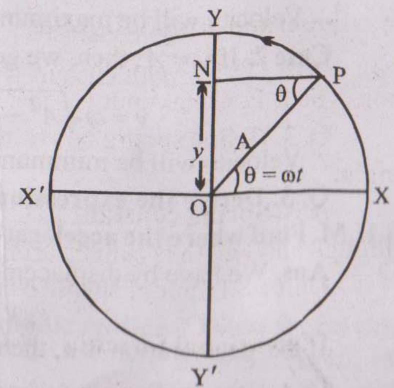
Or

Find an expression for the displacement of S.H.M.

Ans. Let $XYX'Y'$ is a circle whose centre is O and radius a. A particle is moving with uniform angular speed ω on the circle.

Let at $t = 0$, the particle is at X and in time t, it is at P. A perpendicular PN is drawn on YOY' from P and N is foot of the perpendicular.

The particle takes t second to subtend an $\angle POX = \theta$.



$$\therefore \quad \omega = \frac{\theta}{t}$$

or $$\theta = \omega t$$

Let the displacement $ON = y$.

$\therefore$ In ΔNPO,

$$\sin NPO = \frac{ON}{OP}$$

But, $$\angle NPO = \angle POX = \theta = \omega t$$

$$\therefore \quad \sin \omega t = \frac{y}{a}$$

or $$y = a \sin \omega t$$

This is the required expression for the displacement of S.H.M.

Q. 2. Derive an expression for the velocity executing S.H.M. When is the velocity maximum and minimum ? (MP 2009 Set D)

Ans. Expression for velocity : Let $XYX'Y'$ is a circle of centre O and radius a. A particle is moving on the circle with angular velocity ω. Let at $t = 0$, the particle is at X and after t sec, it is at P.

Let at point P, the velocity of the particle is v along the tangent at P.

Now, velocity v is resolved into two parts :

(i) $v \sin \theta$, parallel along to PN and

(ii) $v \cos \theta$, perpendicular to PN.

Since, $v \cos \theta$ is parallel to the direction of motion of foot of the perpendicular N,

$\therefore$ Velocity of N, $u = v \cos \theta$

$$= v \cos \omega t, \qquad \left(\because \omega = \frac{\theta}{t}\right)$$

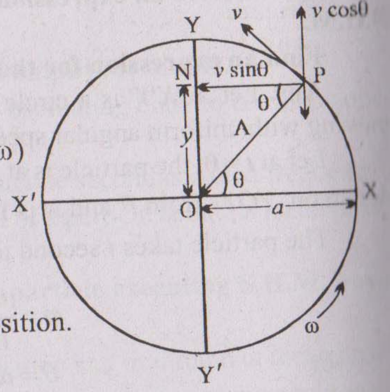
or $$u = v\sqrt{1 - \sin^2 \omega t}, \qquad (\because \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1)$$

or $$u = v\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}, \qquad (\because y = a \sin \omega t)$$

or $$u = v\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}$$

or $$u = \frac{v}{a}\sqrt{a^2-y^2}$$

$\therefore$ $$u = \omega\sqrt{a^2-y^2}, \ (\because v = a\omega)$$



This is the required expression.

Case 1. If $y = 0$, then, we get

$$v = \omega\sqrt{A^2-0} = \omega A$$

$\therefore$ Velocity will be maximum at mean position.

Case 2. If $y = A$, then, we get

$$v = \omega\sqrt{A^2-A^2} = 0$$

$\therefore$ Velocity will be minimum at the extreme position.

Q. 3. Derive the expression for the acceleration of a particle executing S.H.M. Find where the acceleration is maximum and minimum. (V. Imp)

Ans. We have by displacement equation,

$$y = A\sin(\omega t+\phi) \quad ...(1)$$

If the acceleration is a, then we have

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}A\sin(\omega t+\phi)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t+\phi)]$$

or $$a = -A\omega^2\sin(\omega t+\phi) \quad ...(2)$$

But, $$\sin(\omega t+\phi) = \frac{y}{A}, \quad \text{[from eqn. (1)]}$$

$\therefore$ Eqn. (2) becames,

$$a = -A\omega^2 . \frac{y}{A} = -\omega^2 y \quad ...(3)$$

This is the required expression.

Case 1. If $y = 0$, then by eqn. (3),

$$a = 0$$

i.e., At the mean position the acceleration will be zero *i.e.*, minimum.

Case 2. If $y = A$, then

$$a = -\omega^2 A$$

i.e., At extreme position the acceleration is maximum.

Q. 4. Derive the expression for the time period and frequency of a particle executing S.H.M. (MP 2009 Set C, V. Imp)

Ans. Now, we have the magnitude of acceleration is given by

$$a = \omega^2 y$$

or $$\omega^2 = \frac{a}{y}$$

or $$\omega = \sqrt{\frac{a}{y}} = \sqrt{\frac{\text{Acceleration}}{\text{Displacement}}}$$

Now, $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{Displacement}}{\text{Acceleration}}}$$

Again, we know that frequency,

$$\mu = \frac{1}{T}$$

$\therefore$ $$\mu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{Acceleration}}{\text{Displacement}}}.$$

Q. 5. What do you mean by simple harmonic motion ? What are its characteristics ? (MP 2009 Set A, 10, 13)

Ans. When a particle moves to and fro about a point in a straight line such that the acceleration of the particle at any point is directly proportional to its displacement and always directed towards the mean position, then the motion of the particle is called simple harmonic motion.

Characteristics of S.H.M. : (i) The motion is periodic.

(ii) The particle moves to and fro about a point in a straight line.

(iii) The acceleration is directly proportional to the displacement from the mean position.

(iv) The acceleration is always directed towards the mean position.

Long Answer Type Questions

(MP 2009 Set B)

Q. 1. Prove that the motion of simple pendulum is S.H.M. for small amplitude. Find the expression for its time period.

Or

Deduce an expression for the time period of simple pendulum $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. (MP 2011)

Ans. Motion of simple pendulum : Let mass of the bob of simple pendulum is m and its effective length is l, S is the point of suspension and O is the mean position.

Suppose, at any instant, the bob is at P such that displacement $OP = y$ and $\angle OSP = \theta$. Thus, in this position, the forces acting on pendulum are :

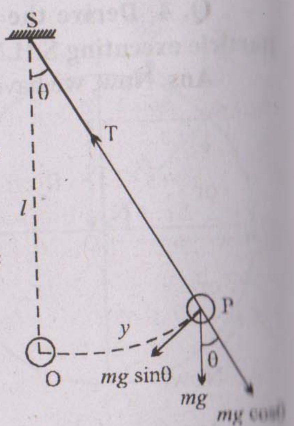
(i) tension T of the thread, along PS direction.

(ii) mg, weight of bob acting vertically downwards. Force mg is resolved into two components :

(i) $mg\cos\theta$, along SP direction and

(ii) $mg\sin\theta$, perpendicular to SP.

Now, the force $mg\cos\theta$ balances the tension force T and $mg\sin\theta$ is restoring force.



$\therefore$ Restoring force, $F = -mg\sin\theta$

The negative sign shows that F is in opposite direction to displacement.

Now, if θ is small and measured in radians *i.e.*,

$$\sin\theta \approx \theta$$

$\therefore$ $$F = -mg\,\theta$$

But, $$\theta = \frac{\text{Arc}}{\text{Radius}} = \frac{y}{l}$$

$\therefore$ $$F = -mg.\frac{y}{l} \quad \ldots(1)$$

If the acceleration is α, then by Newton's second law,

$$F = m\,\alpha \quad \ldots(2)$$

From eqns. (1) and (2), we get

$$m\alpha = -mg\frac{y}{l}$$

or $$\alpha = -\frac{g}{l}.y \quad \ldots(3)$$

As g and l are constants, then

$$\alpha \propto -y \quad \ldots(4)$$

Hence, the acceleration is directly proportional to the displacement and always directed towards the mean position.

Expression for the time period : We know that for a particle executing S.H.M.,

$$\alpha = -\omega^2 y \quad \ldots(5)$$

From eqns. (3) and (5), we get

$$-\omega^2 y = -\frac{g}{l}.y \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$$

or $$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ or } \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ or } \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\therefore$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

This is the required expression.

Q. 2. Define oscillation and also write about the types of oscillation. (MP 2011)

Ans. Oscillation : When an object moves to and from about its mean position (or up and down about its mean position) then this motion is called oscillations or oscillatory motion.

Types of Oscillations :

1. Free Oscillations : When a body is displaced from its mean position and then released, the body executes harmonic motion. If the external force does not affect the motion of the body then each body vibrates with a definite frequency. This is called natural frequency and such oscillations are called "Free oscillations."

2. Damped Oscillations : When a body oscillates with decreasing amplitude due to the presence of damping force then the oscillations of the body are called "damped oscillations".

3. Forced Oscillations : When a body under the influence of an external periodic force, oscillations with a constant amplitude and a frequency equal to that of the periodic force, then the oscillations of the body are called forced oscillations.

Numerical Problem

Q. 1. The time-period of a particle executing S.H.M. is 3 second. Calculate the time after $t = 0$, that its displacement be half of its amplitude.

Solution : Formula : $y = a\sin\omega t$

But $$\omega = 2\pi / T$$

So $$y = a\sin\frac{2\pi}{T}t$$

Given : $T = 3$ second, $y = a/3$

Substituting these value in formula,

$$\frac{a}{2} = a\sin\frac{2\pi t}{3}$$

or $$\sin\frac{2\pi t}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

or $$\frac{2\pi t}{3} = \frac{\pi}{6}$$

or $$t = \frac{1}{4}\text{ second.}$$ **Ans.**

8·2. Wave Motion

Objective Type Questions

(A) Multiple Choice Questions :

(i) Two sources of frequency f_1 and f_2 will have beat frequency :

(a) $\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1}$ (b) $f_1 - f_2$ (c) $2(f_1 - f_2)$ (d) $\sqrt{(f_1^2 - f_2^2)}$.